

Informationen zum Vier-Farben-Spieltisch

von

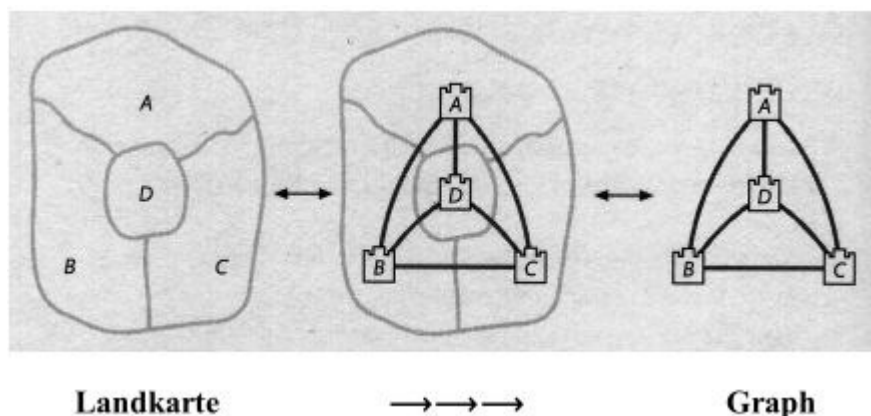
Mag. Franz Vrabec

Das *Haus der Mathematik* stellt für die Ausstellung GRENZGENIAL einen Spieltisch zur Verfügung, mit dem der sogenannte „**Vier-Farben-Satz**“ - eine interessantes und lange Zeit ungelöstes Problem aus der *kombinatorischen Topologie* - den Besuchern nahegebracht werden soll.

Worum geht es dabei? Nehmen wir an, Sie sollen die Länder einer Landkarte (z.B. die Bundesländer von Österreich) „zulässig“ färben, d.h.: **Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie haben, müssen verschieden gefärbt werden!** *Wieviele* verschiedene Farben benötigen Sie dazu *mindesten*? Bei einer Färbung der Karte von Österreich stellt sich heraus, dass diese schon mit *drei* Farben gelingt. Es gibt aber kompliziertere Landkarten, bei denen man *mehr als drei* Farben benötigt (z.B. bei einer Karte von Europa).

Um die Mitte des 19. Jhdts. bemerkten englische Geographen, dass man mit *vier* Farben immer auskommt, egal wie kompliziert die Landkarte auch sein mag! Es wurde versucht, für dieses empirische Ergebnis eine mathematische Begründung zu finden, was lange Zeit ergebnislos blieb (1890 wurde zunächst nur bewiesen, dass man immer mit *fünf* Farben auskommt).

Zur einfacheren Behandlung dieser Aufgabe übersetzen Mathematiker sie in die Sprache der *Graphentheorie*. Das geht so: Wir denken uns im Inneren eines jeden Landes einen Punkt („Knoten“), der die Hauptstadt des Landes repräsentiert. Wenn zwei Länder eine gemeinsame Grenzlinie haben, so verbinden wir die betreffenden Hauptstädte durch eine Linie („Kante“). Dadurch entstehen abstrakte Figuren, die man als „*Graphen*“ bezeichnet. Die folgende Abbildung möge das illustrieren:



Nun lautet die Aufgabe, einen Graph „zulässig“ zu färben, d.h.: **Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, müssen verschieden gefärbt werden!** Mit Hilfe der sich im 20. Jhd. rasch entwickelnden Graphentheorie und mit massiver Computerunterstützung (über 1000 Stunden Rechenzeit!) konnte 1976 endlich bewiesen werden, dass die ursprüngliche Vermutung, jede beliebige, noch so komplizierte Landkarte könne mit vier Farben zulässig gefärbt werden, tatsächlich richtig ist, also ein *mathematischer Satz* ist.

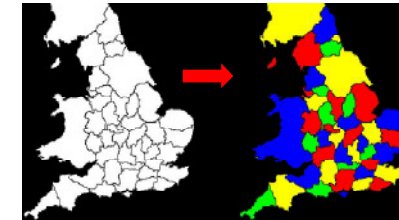
Die Besucher können am Vier-Farben-Spieltisch an Hand von *drei Beispielen* selbst erkunden, welche Schwierigkeiten sich beim „zulässig färben“ sowohl von *Landkarten* (linker Tischeil) als auch von *Graphen* (rechter Tischeil) ergeben. Diese drei Aufgaben sind:

- (1) Färbung der Bundesländer von Österreich (geht mit 3 Farben)
- (2) Färbung der Bundesländer von Deutschland (- „ - 4 Farben)
- (3) Färbung einer „Phantasielandkarte“ (- „ - 4 Farben)

Vom Vier - Farben - Problem zum Vier - Farben - Theorem



Francis Guthrie vermutete 1852, dass sich jede Landkarte mit (höchstens) **4** Farben so färben lässt, dass keine aneinandergrenzenden Länder gleichfarbig sind.



Dieser empirische Befund wurde unter dem Namen „Vier – Farben – Vermutung / Problem“ bekannt.

Erste Beweisversuche im 19. Jhdt.:

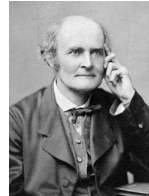
Die ersten Mathematiker, die sich mit diesem Problem beschäftigten, waren:



A. De Morgan
1806-1871



W.R. Hamilton
1806-1871

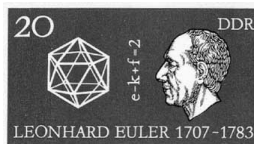


A. Cayley
1821-1895



L. Euler
1707-1783

Mit Hilfe der „Eulerschen Formel“
 $e - k + f = 2$
kann man leicht zeigen, dass
6 Farben ausreichen.



A.B. Kempe
1859-1922



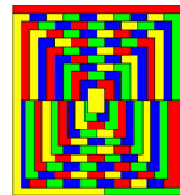
P.J. Heawood
1861-1955

Kempe versuchte 1880 einen Beweis, der nach 10 Jahren von Heawood als fehlerhaft erkannt wurde, gleichzeitig aber nachwies, dass

5 Farben ausreichen.

Computer - „Beweis“ im 20. Jhdt.:

Nun begannen amerikanische Mathematiker, sich mit dem Problem auseinanderzusetzen. Sie führten die Begriffe „unvermeidbare Menge“ und „reduzible Konfiguration“ ein.



Das Problem wurde zwar nicht gelöst, die minimale Länderzahl für ein Gegenbeispiel wurde aber immer höher „geschraubt“, 1971 sogar auf 95 Länder.



G.D. Birkhoff
1884-1944



H. Whitney
1907-1989

Ein deutscher Mathematiker brachte eine neue Idee ins Spiel („Entlade-Prozedur“). Er arbeitete jahrelang an dem Problem!



H. Heesch
1906-1995



Darauf aufbauend konnten im Jahr 1976 **Kenneth Appel** und **Wolfgang Haken** beweisen, dass **4** Farben immer ausreichen, eine beliebige Landkarte zulässig zu färben.

FOUR COLORS
SUFFICE



Mit Hilfe eines Computers untersuchten sie eine unvermeidbare Menge von etwa 1500 Konfigurationen, die sich alle (nach 1200 h Rechenzeit) als reduzibel erwiesen - die „Vier-Farben-Vermutung“ hat sich damit zu einem **Theorem** gewandelt!



K. Appel (geb. 1932, Brooklyn)
W. Haken (geb. 1928, Berlin)

